2025

CANPOINT

全品

高考复习方案

主编：肖德好

数学 RJA

夯实版

听课手册

延边教育出版社

新教材 新一轮 数学

《中国高考评价体系》

指导

2025版《全品高考复习方案》

依据 《普通高中数学课程标准》

细研 高考命题特点及趋势

特点

1. 关注新教材，细讲精练，密切贴合新教材。
2. 渗透数学学科核心素养：数学抽象、逻辑推理、数学建模、数学运算、直观想象、数据分析。
3. 体现高考命题趋势，精选模拟试题。
4. 结合教学一线一轮复习实际，合理设置讲练内容。

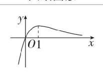
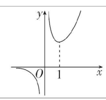
▼ 图书结构与特点

听课手册

基点·难点·重点 讲清·讲透·讲活

必备知识梳理 —— 教材链接 易错剖析

4. 几个常见函数

解析式	大致图象	单调区间	极值点
$y=\frac{x}{e^x}$		单调递增区间为$(-\infty,1)$；单调递减区间为$(1,+\infty)$	$x=1$
$y=\frac{e^x}{x}$		单调递增区间为$(1,+\infty)$；单调递减区间为$(-\infty,0)$，$(0,1)$	$x=1$

夯基础

要点全面覆盖 —— 高考考点 归纳总结

课堂考点探究

探究点一 两条直线的位置关系

例1 已知两直线$l_1:(m+3)x+5y=5-3m$，$l_2:2x+(m+6)y=8$，当m为何值时，l_1与l_2：(1)相交；(2)平行；(3)重合；(4)垂直.

【对点演练1】(1)已知p：直线$x+2y-1=0$与直线$a^2x+(a+1)y-1=0$平行，q：$a=1$，则p是q的 ( )

A. 充要条件

B. 充分不必要条件

专题讲练3 构造函数问题模型

专题讲练4 三角函数中与ω范围有关的问题

—— 重难考点 分专题讲解

破重点

经典真题·明考向 —— 真题剖析 规范答题

素养导向

解题指引——三角函数与解三角形

例 [2023·新课标Ⅰ卷] 已知在$\triangle ABC$中，$A+B=3C$，$2\sin(A-C)=\sin B$.

(1)求$\sin A$；[切入点：三角形的内角和为π]

(2)设$AB=5$，求AB边上的高.[关键点：等面积法]

【思路分析】

(1)根据角的关系及两角和与两角差的正弦公式，化简即可得解；

(2)利用同角之间的三角函数基本关系及两角和的正弦公式求$\sin B$，再由正弦定理求出AC，根据等面积法求解即可.

【步骤拆解】

解：(1)$\because A+B=3C$，$\therefore \pi-C=3C$，即$C=\frac{\pi}{4}$，[1分]

又$2\sin(A-C)=\sin B=\sin(A+C)$，

利用内角和定理及诱导公式，将含三个角的式子转化为只含两个角的式子.

作业手册

薄弱点·疑难点 练熟·练透·练活

课时作业 —— 精准高效 严选习题；重难节次 夯实稳抓基础

第8讲 函数的奇偶性和周期性（时间：40分钟）

一、单项选择题（本大题共8小题）

1. [2023·天津重点中学期末] 下列函数中，是偶函数且在$(0,+\infty)$上单调递减的是 ( )

A. $y=x^2$　B. $y=-\sqrt{x}$

C. $y=x+1$　D. $y=\frac{3}{|x|}$

5. 已知函数$f(x)=x^3+\frac{b}{x}+3(b\in\mathbf{R})$，若$f(-m)=2$，则$f(m)=$ ( )

A. -2　B. 2

C. -4　D. 4

第41讲 空间角(A)（时间：30分钟）

一、单项选择题（本大题共5小题）

1. 在三棱锥$P-ABC$中，$PA=8$，$AB=6$，$AC=4$，$BC=5$，$\angle PAC=45^\circ$，$\angle PAB=60^\circ$，向量$\overrightarrow{AP}$与$\overrightarrow{BC}$的夹角的余弦值是 ( )

A. $\frac{3-2\sqrt{2}}{5}$　B. $\frac{2\sqrt{2}-3}{5}$

C. $\frac{2-3\sqrt{2}}{5}$　D. 0

7. 已知$\triangle ABC$和$\triangle DBC$所在平面垂直，且$AB=BC=BD$，$\angle CBA=\angle DBC=120^\circ$，连接$AD$，则 ( )

A. 异面直线AD与BC所成角的大小为60°

B. 异面直线AB与CD所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{3}}{4}$

C. 直线AD与平面BCD所成角的大小为45°

D. 直线AD与平面BCD所成角的大小为60°

第41讲 空间角(B)（时间：50分钟）

1. 如图，在四棱锥$P-ABCD$中，$PA\perp$平面$ABCD$，$AB\perp AD$，$AD/\!/BC$，$AP=AB=AD=1$，且直线PB与CD所成角的大小为$\frac{\pi}{3}$.

(1)求BC的长；

(2)求二面角$D-PB-C$的余弦值.

2. [2024·辽宁沈阳十五中模拟] 如图，在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，底面边长和侧棱长均相等，且$\cos\angle BAA_1=\cos\angle CAA_1=\frac{1}{3}$.

(1)求直线AA_1与平面ABC所成角的余弦值；

(2)求异面直线AB_1与BC_1所成角的余弦值.

—— 重难节次 加强练 稳步提升

目录 CONTENTS

第六单元 数列

第七单元 立体几何

第八单元 解析几何

第九单元 统计

第十单元 排列、组合与二项式定理、概率

第一单元 | 预备知识

第1讲　集合

课标要求

1. 通过实例,了解集合的含义,理解元素与集合的属于关系.
2. 针对具体问题,能在自然语言和图形语言的基础上,用符号语言刻画集合.
3. 在具体情境中,了解全集与空集的含义.
4. 理解集合之间包含与相等的含义,能识别给定集合的子集.
5. 理解两个集合的并集与交集的含义,能求两个集合的并集与交集.
6. 理解在给定集合中一个子集的补集的含义,能求给定子集的补集.
7. 能使用 Venn 图表达集合的基本关系与基本运算,体会图形对理解抽象概念的作用.

课前基础巩固

知识聚焦

1. 集合的有关概念

(1)集合元素的三个特性:________、________、________.

(2)集合的三种表示方法:________、________、________.

(3)元素与集合的两种关系:属于,记为____;不属于,记为____.

(4)六个特定的集合及其关系图:

$\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$ 表示__________,**N** 表示非负整数集(或自然数集),**Z** 表示__________,**Q** 表示__________,**R** 表示实数集,**C** 表示________.

2. 集合间的基本关系

(1)子集:若对于任意的 $x\in A$,都有________,则 $A\subseteq B$.

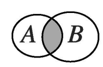
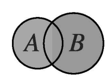
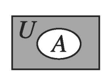
(2)真子集:若 $A\subseteq B$,存在 $x\in B$,且 $x\notin A$,则 A____B 或 B____A.

(3)相等:若 $A\subseteq B$,且__________,则 $A=B$.

(4)空集是任何集合的子集,是__________集合的真子集.

备注:若 A 不是 B 的子集,则记作 $A\nsubseteq B$(或 $B\nsupseteq A$),读作"A 不包含于 B"(或"B 不包含 A").

3. 集合的基本运算

表示/运算	文字语言	符号语言	图形语言	记法
交集	属于 A ______属于 B 的元素组成的集合	$\{x\mid x\in A$, ________ $x\in B\}$		______
并集	属于 A ________ 属于 B 的元素组成的集合	$\{x\mid x\in A$, ________ $x\in B\}$		______
补集	全集 U 中______属于 A 的所有元素组成的集合	$\{x\mid x\in U$, x______$A\}$		______

4. 集合的运算性质

(1)交集的运算性质:$A\cap B=B\cap A$;$A\cap A=A$;$A\cap\varnothing=\varnothing\cap A=\varnothing$;$A\cap B=A\Leftrightarrow A$______$B$.

(2)并集的运算性质：$A\cup B=$________；$A\cup A=A$；$A\cup\varnothing=\varnothing\cup A=A$；$A\cup B=$______$\Leftrightarrow B\subseteq A$.

(3)补集的运算性质：$A\cup(\complement_U A)=U$；$A\cap(\complement_U A)=$____；$\complement_U(\complement_U A)=$____；$\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)$____$(\complement_U B)$；$\complement_U(A\cap B)=$____$\cup$____.

◆◆ **常用结论**

(1)集合的关系

①一个集合的真子集必是其子集，一个集合的子集不一定是其真子集.

②任何一个集合是它本身的子集，空集是任何集合的子集.

③子集的传递性：若 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$(真子集也满足).

④若 $A\subseteq B$，则有 $A=\varnothing$ 和 $A\neq\varnothing$ 两种可能.

(2)集合的子集个数和元素个数

①集合子集的个数：若有限集 A 中有 n 个元素，则 A 的子集有 2^n 个，真子集有 (2^n-1) 个，非空子集有 (2^n-1) 个，非空真子集有 (2^n-2) 个.

②集合元素的个数：$\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(A\cap B)$，$\mathrm{card}(A\cup B\cup C)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)+\mathrm{card}(C)-\mathrm{card}(A\cap B)-\mathrm{card}(A\cap C)-\mathrm{card}(B\cap C)+\mathrm{card}(A\cap B\cap C)$(常用在实际问题中).

(3)集合的运算

$A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A\Leftrightarrow A\cup B=B\Leftrightarrow \complement_U A\supseteq\complement_U B$.

课前演练

题组一　易错辨析

判断下列说法是否正确.(请在括号中打“√”或“×”)

(1)若 $1\in\{x^2,x\}$，则 $x=-1$ 或 $x=1$.　(　　)

(2)集合 $A=\{y\mid y=x^2,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{(x,y)\mid y=x+2,x\in\mathbf{R}\}$，则 $A\cap B=\{(-1,1),(2,4)\}$.　(　　)

(3)已知集合 $A=\left\{x\,\middle|\,y=\dfrac{1}{x}\right\}$，$B=\left\{y\,\middle|\,y=\dfrac{1}{x-1}\right\}$，则 $A\neq B$.　(　　)

题组二　教材改编

1. 设集合 $A=\{x\mid x\geqslant-1\}$，则下列四个关系中正确的是　(　　)

A. $1\in A$　　B. $1\notin A$

C. $\{1\}\in A$　　D. $1\subseteq A$

2. 设集合 $A=\{x\mid 0<x<2\}$，$U=\{x\mid -2<x<2\}$，则 $\complement_U A=$　(　　)

A. $(-2,0)$　　B. $(-2,0]$

C. $(-2,2]$　　D. $(0,2)$

3. 已知集合 $A=\{x\mid 0\leqslant x<7,x\in\mathbf{N}\}$，$B=\{1,2,3,4,5\}$，则集合 A,B 间的关系为　(　　)

A. $A\in B$　　B. $B\in A$

C. $A=B$　　D. $B\subsetneqq A$

课堂考点探究

探究点一　集合的概念及表示

例 1 (1)设集合 $A=\{2,a^2-a+2,1-a\}$，若 $4\in A$，则 a 的值为　(　　)

A. $-1,2$　　B. -3

C. $-1,-3,2$　　D. $-3,2$

(2)[2024·山西名校联考] 已知集合 $A=\{x\mid 2x-a>0\}$，且 $1\notin A$，$2\in A$，则　(　　)

A. $a>4$　　B. $a\leqslant2$

C. $2<a\leqslant4$　　D. $2\leqslant a<4$

[听课笔记]

◆◆ **总结反思**

(1)用描述法表示集合时，要确定构成集合的元素是什么及这些元素的限制条件是什么；

(2)注意对集合中的元素是否满足互异性进行检验.

【对点演练 1】 (1)[2024·江西宁冈中学质检] 设集合 $M=\{y\mid y=x^2+1\}$，则下列元素属于 M 的是　(　　)

A. $(0,2)$　　B. -1

C. $\sqrt{2}$　　D. 0

(2)[2024·湖北黄冈、黄石、鄂州三市联考] 已知集合 $A=\{0,2\}$，$B=\{1,2,3\}$，$C=\{ab\mid a\in A,b\in B\}$，则集合 C 中元素的个数为　(　　)

A. 6　　B. 5

C. 4　　D. 3

[听课笔记]

探究点二　集合间的基本关系

例 2 (1)[2023·北京六十六中期中] 已知集合 $A=\{0\}$,$B=\{-1,0,1\}$,若 $A\subseteq C\subseteq B$,则符合条件的集合 C 的个数为________.

(2)[2023·甘肃酒泉模拟] 已知集合 $A=\{x\mid(m-1)x^2+3x-2=0\}$恰有两个非空真子集,则满足条件的 m 的值构成的集合是____________.

[听课笔记]

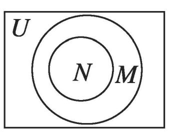
◆◆ **总结反思**

判断集合间的基本关系的常用方法:

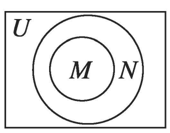
定义法:根据题中限定条件把集合元素表示出来,然后比较集合元素的异同,从而找出集合之间的关系.

图示法:(1)在同一个数轴上表示出两个集合,比较端点之间的大小关系,从而确定集合与集合之间的关系;(2)借助 Venn 图来表示集合间的包含关系.

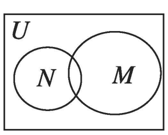
【对点演练 2】 (1)设全集 $U=\mathbf{R}$,则集合 $M=\{0,1,2\}$和 $N=\{x\mid x(x-2)\log_2 x=0\}$之间的关系可表示为　　(　　)



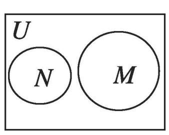
A



B



C



D

(2)[2024·江苏连云港质检] 若集合 $A=\{x\mid 2a+1<x\leqslant 3a-5\}$,$B=\{x\mid 5\leqslant x<16\}$,则能使 $A\subseteq B$ 成立的所有 a 组成的集合为　　(　　)

A. $\{a\mid 2\leqslant a\leqslant 7\}$　　B. $\{a\mid 6\leqslant a\leqslant 7\}$

C. $\{a\mid a<7\}$　　D. $\{a\mid a<6\}$

[听课笔记]

探究点三　集合的基本运算

题型 1　集合的运算

例 3 (1)[2023·新课标Ⅰ卷] 已知集合 $M=\{-2,-1,0,1,2\}$,$N=\{x\mid x^2-x-6\geqslant 0\}$,则 $M\cap N=$　　(　　)

A. $\{-2,-1,0,1\}$　　B. $\{0,1,2\}$

C. $\{-2\}$　　D. $\{2\}$

(2)已知全集 $U=\mathbf{R}$,集合 $A=\{x\mid x-1<0\}$,$B=\{x\mid x>a\}$,且 $\complement_U A\subseteq B$,则实数 a 的取值范围为________.

[听课笔记]

◆◆ **总结反思**

对于已知集合的运算,可根据集合的交集、并集和补集的定义直接求解,也可结合数轴以及 Venn 图求解.

题型 2　利用集合的运算求参数的值(范围)

例 4 (1)[2024·贵州六盘水质检] 已知集合 $A=\{-1,3,6\}$,$B=\{6,x\}$,若 $A\cup B=A$,则实数 x 的值为　　(　　)

A. -1 或 3　　B. -1

C. 3　　D. -1 或 3 或 6

(2)[2024·江苏连云港灌南中学检测] 已知集合 $A=\{x\mid 2a+1\leqslant x\leqslant 3a-5\}$,$B=\{x\mid x<0$ 或 $x>19\}$.若 $A\subseteq(A\cap B)$,则实数 a 的取值范围是________________.

[听课笔记]

◆◆ **总结反思**

根据集合运算求参数,要把集合语言先转换为方程或不等式,然后解方程或不等式,再利用数形结合求解.解题过程中要注意的几点:(1)端点值能否取到;(2)讨论 ax^2 中的 a 是否为零;(3)使用根与系数的关系的前提应满足 $\Delta\geqslant0$.

【对点演练 3】 (1)[2024·重庆缙云教育联盟联考]已知集合 $A=\{x|x<2\}$,$B=\{x|-1\leqslant x\leqslant 3\}$,则 $A\cup B=$ ( )

A. $\{x|x\leqslant3\}$

B. $\{x|x\geqslant-1\}$

C. $\{x|-1\leqslant x<2\}$

D. $\{x|-1\leqslant x\leqslant3\}$

(2)(多选题)[2024·福州金桥学校期中]已知集合 $A=\{x|-1<x\leqslant3\}$,集合 $B=\{x||x|\leqslant2\}$,则下列关系式正确的是 ( )

A. $A\cap B=\varnothing$

B. $A\cup B=\{x|-2\leqslant x\leqslant3\}$

C. $A\cup(\complement_{\mathbf{R}}B)=\{x|x\leqslant-1$ 或 $x>2\}$

D. $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=\{x|2<x\leqslant3\}$

(3)[2024·重庆四区联考]设集合 $M=\{x|x^2-2x-8=0\}$,$N=\{x|ax-2=0\}$,若 $M\cup N=M$,则实数 a 的所有取值组成的集合的子集个数为 ________.

[听课笔记]

探究点四 集合的新定义问题

例 5 (多选题)[2023·云南曲靖期中]若对任意 $x\in A$,$\frac{1}{x}\in A$,则称 A 为"影子关系"集合,下列集合为"影子关系"集合的是 ( )

A. $\{-1,1\}$

B. $\left\{\frac{1}{2},2\right\}$

C. $\{x|x^2>1\}$

D. $\{x|x>0\}$

[听课笔记]

◆◆ **总结反思**

破解集合新定义问题的关键:

(1)读懂新定义:首先分析新定义的特点,把新定义所叙述的问题的本质弄清楚,应用到具体的解题过程之中.

(2)会转化:解题时要善于从试题中发现可以使用集合性质的一些因素进行转化,化陌生问题为熟悉的问题.

【对点演练 4】 (1)(多选题)整数集 $\mathbf{Z}$ 中,被 5 除所得余数为 k 的所有整数组成一个"类",记为 $[k]$,即 $[k]=\{5n+k|n\in\mathbf{Z}\}$,其中 $k\in\{0,1,2,3,4\}$. 以下判断正确的是 ( )

A. $2023\in[3]$

B. $-2\in[2]$

C. $\mathbf{Z}=[0]\cup[1]\cup[2]\cup[3]\cup[4]$

D. 若 $a-b\in[0]$,则整数 a,b 属同一"类"

(2)(多选题)[2023·湖北部分学校联考]若一个集合中含有 n 个元素,则称该集合为"n 元集合". 已知集合 $A=\{x\in\mathbf{Z}|-x^2+8x-7\geqslant a^x\}(a>1)$ 为"5 元集合",则 a 的取值可以为 ( )

A. $\sqrt{5}$　　B. $\sqrt[7]{5}$

C. $\sqrt[6]{5}$　　D. 1.5

[听课笔记]

第 2 讲　常用逻辑用语

课标要求

1. 通过对典型数学命题的梳理，理解必要条件、充分条件、充要条件的意义，理解性质定理与必要条件的关系、判定定理与充分条件的关系、数学定义与充要条件的关系.
2. 通过已知的数学实例，理解全称量词与存在量词的意义.
3. 能正确使用存在量词对全称量词命题进行否定，能正确使用全称量词对存在量词命题进行否定.

课前基础巩固

知识聚焦

1. 充分条件、必要条件与充要条件的概念

若 $p\Rightarrow q$，则 p 是 q 的________条件，q 是 p 的________条件	
p 是 q 的____________条件	$p\Rightarrow q$ 且 $q\nRightarrow p$
p 是 q 的____________条件	$p\nRightarrow q$ 且 $q\Rightarrow p$
p 是 q 的________条件	$p\Leftrightarrow q$
p 是 q 的____________条件	$p\nRightarrow q$ 且 $q\nRightarrow p$

2. 全称量词与存在量词

(1)短语“所有的”“任意一个”在逻辑中通常叫作__________，并用符号“____”表示.

(2)短语“存在一个”“至少有一个”在逻辑中通常叫作__________，并用符号“____”表示.

(3)含有一个量词的命题的否定：

全称量词命题：$\forall x\in M$，$p(x)$，它的否定：______________.

存在量词命题：$\exists x\in M$，$p(x)$，它的否定：______________.

◆◆ 常用结论

1. 充要条件的两个结论：

(1)若 p 是 q 的充分不必要条件，q 是 r 的充分不必要条件，则 p 是 r 的充分不必要条件；

(2)若 p 是 q 的充分不必要条件，则 $\neg q$ 是 $\neg p$ 的充分不必要条件.

2. 充分、必要条件与集合的关系

使 p 成立的对象构成的集合为 A，使 q 成立的对象构成的集合为 B	
p 是 q 的充分条件	$A\subseteq B$
p 是 q 的必要条件	$B\subseteq A$
p 是 q 的充分不必要条件	$A\subsetneqq B$
p 是 q 的必要不充分条件	$B\subsetneqq A$
p 是 q 的充要条件	$A=B$

课前演练

题组一　易错辨析

判断下列说法是否正确.(请在括号中打“√”或“×”)

(1)全称量词命题一定含有全称量词.　(　　)

(2)“有些三角形中三个内角相等”是存在量词命题.　(　　)

(3)$a=1$ 是 $a^2=1$ 的充要条件.　(　　)

(4)$a>0$，$b>0$ 成立的一个必要不充分条件是 $a+b>0$.　(　　)

题组二　教材改编

1. 命题“$\exists a\in[0,1]$，$a^4+a^2>1$”的否定是　(　　)

A. $\exists a\notin[0,1]$，$a^4+a^2>1$

B. $\exists a\in[0,1]$，$a^4+a^2\leqslant 1$

C. $\forall a\in[0,1]$，$a^4+a^2>1$

D. $\forall a\in[0,1]$，$a^4+a^2\leqslant 1$

2. 下列命题中是假命题的是　(　　)

A. $\exists x\in\mathbf{R}$，$\lg x=1$

B. $\exists x\in\mathbf{R}$，$\sin x=0$

C. $\forall x\in\mathbf{R}$，$x^3>0$

D. $\forall x\in\mathbf{R}$，$2^x>0$

3. 对于实数 x，“$x<0$”是“$x<1$”的　(　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

探究点一 充分条件与必要条件

例1 (1)[2023·全国甲卷] 设甲:$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=1$,乙:$\sin\alpha+\cos\beta=0$,则 ( )

A. 甲是乙的充分条件但不是必要条件

B. 甲是乙的必要条件但不是充分条件

C. 甲是乙的充要条件

D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

(2)[2024·重庆西南大学附中期末] 已知 p:$x>0$,q:$x+\frac{1}{x}\geqslant2$,则 p 是 q 的 ( )

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

[听课笔记]

◆◆ **总结反思**

充分条件、必要条件的两种判定方法:

(1)定义法:根据 $p\Rightarrow q$,$q\Rightarrow p$ 进行判断,适用于定义、定理判断性问题.

(2)集合法:根据 p,q 对应的集合之间的包含关系进行判断,多适用于条件中涉及参数范围的推断问题.

【对点演练1】 (1)[2023·广东珠海斗门区三模] “$a+1>b-2$”是“$a>b$”的 ( )

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

(2)[2023·天津十二区重点学校联考] 已知 $a\neq0$,p:$x=1$ 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个根,q:$a+b+c=0$,则 p 是 q 的 ( )

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

[听课笔记]

探究点二 全称量词与存在量词

题型1 含量词命题的否定

例2 [2023·江西九江模拟] 已知命题 p:$\forall x\in\mathbf{R}$,$2023^x+x^{2024}>0$,则 p 的否定是 ( )

A. $\forall x\in\mathbf{R}$,$2023^x+x^{2024}\leqslant0$

B. $\exists x\in\mathbf{R}$,$2023^x+x^{2024}<0$

C. $\exists x\in\mathbf{R}$,$2023^x+x^{2024}\leqslant0$

D. $\exists x\in\mathbf{R}$,$2023^x+x^{2024}\neq0$

[听课笔记]

◆◆ **总结反思**

全称量词命题的否定是把“全称量词”改为“存在量词”,然后对原命题的结论进行否定;存在量词命题的否定是把“存在量词”改为“全称量词”,然后对原命题的结论进行否定.

题型2 含量词命题的真假判定

例3 (多选题)[2023·广州八区联考] 下列命题为真命题的是 ( )

A. 任意两个等边三角形都相似

B. 所有的素数都是奇数

C. $\forall x\in\mathbf{R}$,$x+|x|\geqslant0$

D. $\exists x\in\mathbf{R}$,$x^2-x+1=0$

[听课笔记]

◆◆ **总结反思**

全称量词命题与存在量词命题真假的判断方法:对于全称量词命题,所有对象都能使命题为真,则这个全称量词命题为真命题;对于存在量词命题,只要有一个对象使命题为真,则这个存在量词命题为真命题.

题型 3　由含量词命题的真假求参数范围

例 4 (1)[2023·江苏扬州模拟] 若“$\exists x\in\mathbf{R}$, $x^2+1\leqslant m$”是假命题,则实数 m 的取值范围是　(　　)

A. $(-\infty,1]$　　B. $(-\infty,1)$

C. $[1,+\infty)$　　D. $(1,+\infty)$

(2)“$\forall x\in\{x\mid-2\leqslant x\leqslant 3\}$, $x^2-2a\leqslant 0$”是真命题的一个必要不充分条件是　(　　)

A. $a\geqslant 1$　　B. $a\geqslant\dfrac{9}{2}$

C. $a\geqslant 5$　　D. $a\leqslant 4$

[听课笔记]

◆◆ **总结反思**

应用充分条件、必要条件求解参数范围的方法:

(1)把充分条件、必要条件或充要条件转化为集合之间的关系,然后根据集合之间的关系列出关于参数的不等式(或不等式组)求解;

(2)检验区间的端点值,不等式是否能够取等号决定端点值的取舍,处理不当容易出现漏解或增解的现象.

【对点演练 2】 (1)[2023·山东郓城一中期末] 已知命题 p: $\exists x\in\mathbf{R}$, $2^x+2\leqslant 0$,则命题 p 的否定是　(　　)

A. $\exists x\in\mathbf{R}$, $2^x+2>0$

B. $\forall x\in\mathbf{R}$, $2^x+2>0$

C. $\exists x\in\mathbf{R}$, $2^x+2<0$

D. $\forall x\in\mathbf{R}$, $2^x+2\leqslant 0$

(2)下列命题中,为真命题的是　(　　)

A. $\exists x\in\mathbf{R}$, $\sin^2\dfrac{x}{3}+\cos^2\dfrac{x}{3}=\dfrac{1}{3}$

B. $\forall x\in(0,\pi)$, $\sin x>\cos x$

C. $\exists x\in\mathbf{R}$, $x^2+x=-2$

D. $\forall x\in(0,+\infty)$, $e^x>x+1$

(3)[2023·山东泰安模拟] 若“$\exists x\in\mathbf{R}$, $2x^2-mx+1<0$”是假命题,则实数 m 的取值范围是________.

[听课笔记]

第 3 讲　等式性质与不等式性质

课标要求　梳理等式的性质,理解不等式的概念,掌握不等式的性质.

课前基础巩固

知识聚焦

1. 两个实数比较大小的方法

(1)作差法 $\begin{cases}a-b>0\Leftrightarrow a\_\_\_\_\_\_ b,\\ a-b=0\Leftrightarrow a\_\_\_\_\_\_ b,\\ a-b<0\Leftrightarrow a\_\_\_\_\_\_ b.\end{cases}$

(2)作商法

$\begin{cases}\dfrac{a}{b}>1(a\in\mathbf{R},b>0)\Leftrightarrow a\_\_\_\_\_\_ b(a\in\mathbf{R},b>0),\\ \dfrac{a}{b}<1(a\in\mathbf{R},b>0)\Leftrightarrow a\_\_\_\_\_\_ b(a\in\mathbf{R},b>0).\end{cases}$

2. 等式的性质

(1)若 $a=b$,则 $b=a$;

(2)若 $a=b$, $b=c$,则 $a=c$;

(3)若 $a=b$,则对任意 c,都有________或________;

(4)若 $a=b$,则对任意不为零的 c,都有________或________.

3. 不等式的性质

(1)对称性: $a>b\Leftrightarrow$________(双向性).

(2)传递性: $a>b$, $b>c\Rightarrow a>c$(单向性).

(3)可加性: $a>b\Leftrightarrow a+c$____$b+c$(双向性).

(4)可乘性: $a>b$, $c>0\Rightarrow ac$____bc;

$a>b$, $c<0\Rightarrow ac$____bc.

(5) $a>b$, $c>d\Rightarrow$________(单向性).

(6) $a>b>0, c>d>0 \Rightarrow ac$ ____ bd（单向性）.

(7)乘方法则：$a>b>0 \Rightarrow a^n$ ______ $b^n (n\in \mathbf{N}, n\geqslant 2)$（单向性）.

◆◆ **常用结论**

1. 大减小，小减大，大的更大，小的更小，即 $a<x<b, c<y<d \Rightarrow a-d<x-y<b-c$.

2. 已知 a,b,m 都是正数，且 $a>b$，则

(1) $\frac{b-m}{a-m}<\frac{b}{a}<\frac{b+m}{a+m}(b-m>0)$，即真分数越加越大，越减越小；

(2) $\frac{a+m}{b+m}<\frac{a}{b}<\frac{a-m}{b-m}(b-m>0)$，即假分数越加越小，越减越大.

课前演练

题组一　易错辨析

判断下列说法是否正确.(请在括号中打"√"或"×")

(1)实数 a 不大于 -2，用不等式表示为 $a\geqslant -2$.（　）

(2) $x^2>y^2$ 的充要条件是 $|x|>|y|$.（　）

(3)若 $a>b$，则 $ac^2>bc^2$.（　）

(4)不等式 $\frac{x-1}{x+2}\leqslant 2$ 的解集是 $[-5,+\infty)$.（　）

题组二　教材改编

1. 已知 $0<a<1<b$，则下列不等式一定正确的是（　）

A. $b-a>1$　　B. $ab>1$

C. $\frac{b}{a}<1$　　D. $a+b>1$

2. 已知 a,b,c,d 为实数，$a>b$ 且 $c>d$，则下列不等式一定成立的是（　）

A. $ac>bd$　　B. $a+c>b+d$

C. $ac<bd$　　D. $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

3. 已知 $a=\sqrt{6}+\sqrt{10}, b=2\sqrt{3}+2$，则 a,b 的大小关系是（　）

A. $a>b$　　B. $a=b$

C. $a<b$　　D. 无法确定

4. 已知 $1\leqslant a\leqslant 4, -1\leqslant b\leqslant 2$，则 $3a-b$ 的取值范围是（　）

A. $-13\leqslant 3a-b\leqslant 1$

B. $-1\leqslant 3a-b\leqslant 8$

C. $-1\leqslant 3a-b\leqslant 13$

D. $1\leqslant 3a-b\leqslant 13$

课堂考点探究

探究点一　比较数（式）的大小

例1 (1)[2024·河南许昌质检] 已知 $x=-a^2-2a+3, y=4-3a$，则（　）

A. $x<y$

B. $x=y$

C. $x>y$

D. x 与 y 的大小无法判断

(2)已知 $c>1$，且 $x=\sqrt{c+1}-\sqrt{c}, y=\sqrt{c}-\sqrt{c-1}$，则 x,y 之间的大小关系是（　）

A. $x>y$

B. $x=y$

C. $x<y$

D. x,y 的关系随 c 而定

[听课笔记]

◆◆ **总结反思**

比较两个数(或式子)的大小可以利用不等式的性质直接判断，也可以用作差法或作商法. 作差法最后要变成因式相乘或相除的形式，然后差值与 0 比较大小；作商法一般要先判断两个量的正负，然后作商，商值与 1 比较大小.

【对点演练 1】 (1)[2023·石家庄北华中学期中] 已知 $M=a^2+4a+1, N=2a-\frac{1}{2}$，则 M 与 N 的大小关系是（　）

A. $M\leqslant N$　　B. $M<N$

C. $M\geqslant N$　　D. $M>N$

(2)若 $0<x<1$，则 $x,\frac{1}{x},\sqrt{x},x^2$ 中最小的是________.

[听课笔记]

探究点二　不等式的性质及应用

题型 1　不等式的性质

例 2 (1)[2023·江苏扬州高邮调研] 下列命题中是真命题的是　(　)

A. 如果 $ac>bc$，那么 $a>b$

B. 如果 $ac^2>bc^2$，那么 $a>b$

C. 如果 $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$，那么 $a>b$

D. 如果 $a>b,c>d$，那么 $a-c>b-d$

(2)[2023·四川成都七中期中] 若实数 x,y 满足 $-1\leqslant x+y\leqslant 1,1\leqslant x+2y\leqslant 3$，则 $x+3y$ 的取值范围是________.

[听课笔记]

◆◆ **总结反思**

(1)在应用不等式的性质时，一定要搞清它们成立的前提条件，不可强化或弱化成立的条件；

(2)要注意“箭头”是单向的还是双向的，也就是说每条性质是否具有可逆性.

题型 2　不等式的应用

例 3 有三个房间需要粉刷，粉刷方案要求：每个房间只用一种颜色，且三个房间颜色各不相同. 已知三个房间的粉刷面积(单位：m^2)分别为 x,y,z，且 $x<y<z$，三种颜色涂料的粉刷费用(单位：元/m^2)分别为 a,b,c，且 $a<b<c$. 在不同的方案中，最低的总费用(单位：元)是　(　)

A. $ax+by+cz$　　B. $az+by+cx$

C. $ay+bz+cx$　　D. $ay+bx+cz$

[听课笔记]

◆◆ **总结反思**

在解决与不等关系有关的实际问题时，要读懂题意，用适当的不等号将相关数(或式)联系起来，还要注意字母的实际意义.

【对点演练 2】 (1)[2024·重庆渝北中学期中] 已知 $a<b<0$，则下列不等式成立的是　(　)

A. $a^2<ab$　　B. $ab<b^2$

C. $a^2<b^2$　　D. $a^2>b^2$

(2)(多选题)[2024·浙江嘉兴五中期中] 已知实数 x,y 满足 $1<x<6,2<y<3$，则　(　)

A. $3<x+y<9$

B. $-1<x-y<3$

C. $2<xy<18$

D. $\frac{1}{3}<\frac{x}{y}<3$

(3)[2024·武汉武昌区联考] 购买同一种物品，有以下两种不同的策略，第一种是每次购买一定数量的这种物品；第二种是每次购买一定价钱的这种物品. 假设连续两天购买该物品，第一天物品的单价为 p_1，第二天物品的单价为 p_2，且 $p_1\neq p_2$，则以下选项正确的为　(　)

A. 第一种策略购买物品的平均单价为 $\frac{p_1p_2}{p_1+p_2}$

B. 第二种策略购买物品的平均单价为 $\frac{p_1+p_2}{2}$

C. 第一种策略购买物品所用单价更低

D. 第二种策略购买物品所用单价更低

[听课笔记]

第 4 讲　基本不等式

课标要求　1. 探索并了解基本不等式的证明过程.
2. 能用基本不等式解决简单的最大值或最小值问题.

课前基础巩固

知识聚焦

1. 基本不等式$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$

(1)基本不等式成立的条件:__________.

(2)等号成立的条件:当且仅当________时取等号.

2. 几个重要的不等式

(1)$a^2+b^2\geqslant$________$(a,b\in\mathbf{R})$.

(2)$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant$________$(a,b$ 同号$)$.

(3)$ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2(a,b\in\mathbf{R})$.

(4)$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}(a,b\in\mathbf{R})$.

3. 算术平均数与几何平均数

给定两个正数 a,b,数__________称为 a,b 的算术平均数;数$\sqrt{ab}$称为 a,b 的几何平均数.

基本不等式可叙述为:____________________
__________.

4. 利用基本不等式求最值问题

已知 $x>0,y>0$. 则

(1)如果积 xy 是定值 p,那么当且仅当 $x=y$ 时,$x+y$ 有最小值,是________(简记:积定和最小).

(2)如果和 $x+y$ 是定值 p,那么当且仅当$x=y$ 时,xy 有最大值,是________(简记:和定积最大).

◆◆ **常用结论**

1. 若 $x\neq0$,则$\left|x+\frac{1}{x}\right|\geqslant2$,当且仅当 $x=\pm1$ 时,等号成立.

2. 若 $ab\neq0$,则$\left|\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right|\geqslant2$,当且仅当 $a=\pm b$ 时,等号成立.

3. 若 $ab>0,x\neq0$,则$\left|ax+\frac{b}{x}\right|\geqslant2\sqrt{ab}$,当且仅当 $x=\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$时,等号成立.

课前演练

题组一　易错辨析

判断下列说法是否正确.(请在括号中打“√”或“×”)

(1)对任意 $a,b\in\mathbf{R}$,$a^2+b^2\geqslant2ab$ 成立.　(　　)

(2)若 $a>0,b>0$,则 $ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.　(　　)

(3)当 a,b 同号时,$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant2$.　(　　)

题组二　教材改编

1. 已知 $x>0$,则 $y=x+\frac{4}{x}$的最小值为　(　　)

A. 2　B. 4
C. -2　D. -4

2. 已知 $a>0,b>0,ab=9$,则 $a+b$ 的最小值为　(　　)

A. 6　B. 9
C. 12　D. 36

3. 已知 $4a^2+b^2=6$,则 ab 的最大值为　(　　)

A. $\frac{3}{4}$　B. $\frac{3}{2}$

C. $\frac{5}{2}$　D. 3

探究点一　利用基本不等式求最值

题型 1　配凑法求最值

例 1 (1)[2024·山西晋中平遥二中质检] 已知 $0<x<2$，则 $y=2x\sqrt{4-x^2}$ 的最大值为　(　　)

A. 2　　B. 4

C. 5　　D. 6

(2)[2023·长沙二模] 函数 $y=x+\frac{1}{x+2}(x>-2)$ 的最小值为　(　　)

A. 3　　B. 2

C. 1　　D. 0

[听课笔记]

◆◆ **总结反思**

配凑法就是将相关代数式进行适当的变形，通过添项、拆项等方法凑成和为定值或积为定值的形式，然后利用基本不等式求解最值的方法. 配凑法的实质是代数式的灵活变形，配系数、凑常数是关键.

【对点演练 1】 (1)[2023·福建南平一模] 若函数 $f(x)=\frac{x^2-2x+4}{x-2}(x>2)$ 在 $x=a$ 处取最小值，则 $a=$　(　　)

A. $1+\sqrt{5}$　　B. 2

C. 4　　D. 6

(2)[2024·江苏苏州中学期中] 设 $xy>0$，则 $\frac{2y-x}{x}+\frac{x+2y}{y}$ 的最小值为________.

[听课笔记]

题型 2　常数代换法求最值

例 2 (1)[2024·四川巴中期中] 已知正数 x,y 满足 $\frac{x}{2}+y=1$，则 $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}$ 的最小值为　(　　)

A. 5　　B. $\frac{9}{2}$

C. 4　　D. $\frac{7}{2}$

(2)若正数 x,y 满足 $x+y=xy$，则 $x+2y$ 的最小值是　(　　)

A. 6　　B. $2+3\sqrt{2}$

C. $3+2\sqrt{2}$　　D. $2+2\sqrt{3}$

[听课笔记]

◆◆ **总结反思**

常数代换法主要解决形如“已知 $mx+ny=t$（t 为不等于 0 的常数），求 $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}$ 的最值”或“已知 $\frac{m}{x}+\frac{n}{y}=t$（$t$ 为不等于 0 的常数），求 $ax+by$ 的最值”的问题，通常将 $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}$ 转化为 $\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}\right)\cdot\frac{mx+ny}{t}$ 或将 $ax+by$ 转化为 $\left(\frac{m}{x}+\frac{n}{y}\right)\cdot\frac{ax+by}{t}$，再利用基本不等式求最值.

【对点演练 2】 (1)[2024·江苏连云港灌南二中期中] 已知 $x+y=1$，$y>0$，$x>0$，则 $\frac{1}{2x}+\frac{x}{y+1}$ 的最小值为　(　　)

A. $\frac{5}{4}$　　B. 0

C. 1　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(2)已知 $x>y>0$ 且 $4x+3y=1$，则 $\frac{1}{2x-y}+\frac{2}{x+2y}$ 的最小值为　(　　)

A. 10　　B. 9

C. 8　　D. 7

[听课笔记]

题型 3　消元法求最值

例 3［2023·重庆南开中学质检］已知 $x>0,y>0,xy+2x-y=10$，则 $x+y$ 的最小值为　(　　)

A. $2\sqrt{2}-1$　　B. $2\sqrt{2}$

C. $4\sqrt{2}$　　D. $4\sqrt{2}-1$

[听课笔记]

◆◆ **总结反思**

通过消元法利用基本不等式求最值的策略：当所求最值的代数式中的变量比较多时，通常考虑利用已知条件消去部分变量后，凑出“和为常数”或“积为常数”，最后利用基本不等式求最值.

【对点演练 3】［2024·天津和平区模拟］已知 $x^2y^2+y^4=1(x,y\in\mathbf{R})$，则 x^2+3y^2 的最小值是______.

[听课笔记]

探究点二　基本不等式的变形应用

例 4 (1)已知 $0<a<1,b>1$，则下列不等式成立的是　(　　)

A. $a+b<\dfrac{4ab}{a+b}$

B. $\sqrt{ab}<\dfrac{2ab}{a+b}$

C. $\sqrt{2a^2+2b^2}<2\sqrt{ab}$

D. $a+b<\sqrt{2a^2+2b^2}$

(2)(多选题)已知 $a>0,b>0$，则下列不等式一定成立的是　(　　)

A. $a+b+\dfrac{1}{\sqrt{ab}}\geqslant 2\sqrt{2}$

B. $\dfrac{2ab}{a+b}\geqslant\sqrt{ab}$

C. $\dfrac{a^2+b^2}{\sqrt{ab}}\geqslant a+b$

D. $(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\geqslant 4$

[听课笔记]

◆◆ **总结反思**

基本不等式的常见变形

(1) $ab\leqslant\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2\leqslant\dfrac{a^2+b^2}{2}$.

(2) $\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\dfrac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}(a>0,b>0)$.

【对点演练 4】 已知 $a>0,b>0$，则下列不等式一定成立的是　(　　)

A. $\dfrac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$

B. $\dfrac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}\leqslant\sqrt{ab}$

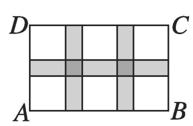
C. $\sqrt{ab}\leqslant\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}\leqslant\dfrac{a+b}{2}$

D. $\sqrt{ab}\leqslant\dfrac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$

[听课笔记]

探究点三　基本不等式的实际应用

例 5 某社区计划在一块空地上种植花卉，已知这块空地是面积为 1800 平方米的矩形 $ABCD$，为了方便居民观赏，在这块空地中间修了如图所示的三条宽度为 2 米的人行通道，则种植花卉区域的面积的最大值是　(　　)



A. 1208 平方米　　B. 1448 平方米

C. 1568 平方米　　D. 1698 平方米

[听课笔记]

◆◆ **总结反思**

利用基本不等式解决实际问题的策略

(1)根据实际问题抽象出函数的解析式,再利用基本不等式求得函数的最值;

(2)解应用题时,一定要注意变量的实际意义及其取值范围;

(3)在应用基本不等式求函数最值时,若等号取不到,可利用函数的单调性求解.

【对点演练5】[2024·湖南师大附中期中]快递公司计划在某货运枢纽附近投资配建货物分拣中心.假定每月的土地租金成本与分拣中心到货运枢纽的距离成反比,每月的货物运输成本与分拣中心到货运枢纽的距离成正比.经测算,如果在距离货运枢纽10 km处配建分拣中心,则每月的土地租金成本和货物运输成本分别为2万元和8万元.要使得两项成本之和最小,分拣中心和货运枢纽的距离应设置为 ( )

A. 5 km　　B. 6 km

C. 7 km　　D. 8 km

[听课笔记]

第5讲　一元二次方程、不等式

课标要求

1. 会结合一元二次函数的图象,判断一元二次方程实根的存在性及实根的个数,了解函数的零点与方程根的关系.
2. 经历从实际情境中抽象出一元二次不等式的过程,了解一元二次不等式的现实意义,能借助一元二次函数求解一元二次不等式,并能用集合表示一元二次不等式的解集.
3. 借助一元二次函数的图象,了解一元二次不等式与相应函数、方程的联系.

课前基础巩固

知识聚焦

1. 一元二次不等式

把只含有一个未知数,并且未知数的最高次数是2的不等式,称为一元二次不等式,其一般形式为 $ax^2+bx+c>0$ 或______ (a,b,c 均为常数,$a\neq0$).

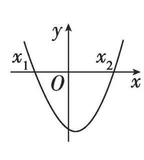
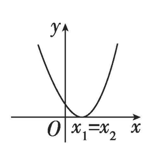
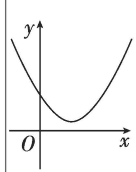
2. 一元二次不等式的解法步骤

(1)将不等式化为右边为零,左边为二次项系数大于零的不等式 $ax^2+bx+c>0(a>0)$ 或 $ax^2+bx+c<0(a>0)$.

(2)求出相应的一元二次方程的根.

(3)利用二次函数的图象与 x 轴的交点确定一元二次不等式的解集.

3. 一元二次不等式与相应的二次函数及一元二次方程的关系

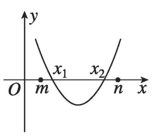
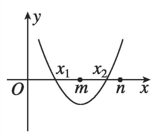
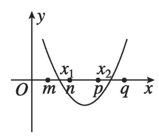
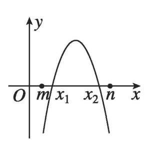
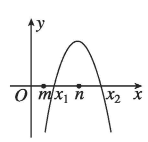
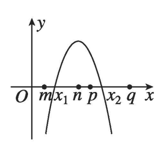
判别式 $\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$ 的图象			
一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$ 的根	有两个相异实根 $x_1,x_2(x_1<x_2)$	有两个相等实根 $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$	没有实数根

（续表）

判别式 $\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
$ax^2+bx+c>0$ $(a>0)$ 的解集	________	________	$\mathbf{R}$
$ax^2+bx+c<0$ $(a>0)$ 的解集	________	$\varnothing$	$\varnothing$

4. 一元二次方程根的分布

设函数 $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$，且 $f(x)=0$ 的两实根分别为 x_1,x_2.

分布情况	两实根都在 (m,n) 内	两实根有且仅有一根在 (m,n) 内	一根在 (m,n) 内，另一根在 (p,q) 内 $(p\geqslant n)$
大致图象 $(a>0)$			
得出的结论	$\begin{cases}\Delta\geqslant 0,\\ f(m)>0,\\ f(n)>0,\\ m<-\dfrac{b}{2a}<n\end{cases}$	$f(m)\cdot f(n)<0$	$\begin{cases}f(m)>0,\\ f(n)<0,\\ f(p)<0,\\ f(q)>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}f(m)f(n)<0,\\ f(p)f(q)<0\end{cases}$
大致图象 $(a<0)$			
得出的结论	$\begin{cases}\Delta\geqslant 0,\\ f(m)<0,\\ f(n)<0,\\ m<-\dfrac{b}{2a}<n\end{cases}$	$f(m)\cdot f(n)<0$	$\begin{cases}f(m)<0,\\ f(n)>0,\\ f(p)>0,\\ f(q)<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}f(m)f(n)<0,\\ f(p)f(q)<0\end{cases}$

◆◆ **常用结论**

1. 一元二次不等式恒成立问题

(1)不等式 $ax^2+bx+c>0(a\neq 0)$，$x\in\mathbf{R}$ 恒成立 $\Leftrightarrow a>0$ 且 $\Delta<0$；

(2)不等式 $ax^2+bx+c<0(a\neq 0)$，$x\in\mathbf{R}$ 恒成立 $\Leftrightarrow a<0$ 且 $\Delta<0$.

2. 简单分式不等式

(1) $\dfrac{f(x)}{g(x)}\geqslant 0\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)g(x)\geqslant 0,\\ g(x)\neq 0;\end{cases}$

(2) $\dfrac{f(x)}{g(x)}>0\Leftrightarrow f(x)g(x)>0$.

3. 能成立问题的转化：$a>f(x)$ 能成立 $\Rightarrow a>f(x)_{\min}$；$a\leqslant f(x)$ 能成立 $\Rightarrow a\leqslant f(x)_{\max}$.

课前演练

题组一　易错辨析

判断下列说法是否正确.(请在括号中打“√”或“×”)

(1)关于 x 的一元二次方程 $mx^2-5x=0$ 的两实根分别是 $0,\dfrac{5}{m}$.　(　　)

(2)若关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0(a<0)$ 没有实数根，则关于 x 的不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $\mathbf{R}$.　(　　)

(3)如果二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象开口向上，那么不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集一定不是空集.　(　　)

(4)关于 x 的不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集可能是 $(m,+\infty)$(m 为常数).　(　　)

题组二　教材改编

1. 不等式 $-x^2-x+6>0$ 的解集为　(　　)

A. $\{x\mid -2<x<3\}$

B. $\{x\mid -3<x<2\}$

C. $\{x\mid x<-2$，或 $x>3\}$

D. $\{x\mid x<-3$，或 $x>2\}$

2. 若关于 x 的不等式 $ax^2+bx+6>0$ 的解集为 $\{x\mid x<-3$，或 $x>-2\}$，则　(　　)

A. $a=1,b=-5$

B. $a=-1,b=5$

C. $a=-1,b=-5$

D. $a=1,b=5$

3. 若不等式 $ax^2-ax+a+1>0$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，则实数 a 的取值范围为________.

探究点一　一元二次不等式的解法

题型 1　不含参数的不等式

例 1 (1)不等式 $8x-3x^2>4$ 的解集是　　(　　)

A. $(2,+\infty)$

B. $\left(\frac{2}{3},2\right)$

C. $\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)\cup(2,+\infty)$

D. $\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)$

(2)[2024·广东潮州凤塘中学期末] 在下列不等式中,解集为$\{x|x<1$,或$x>3\}$的不等式是 (　　)

A. $1-\left|\frac{x}{2}-1\right|<\frac{1}{2}$　　B. $|2x-4|>3$

C. $\frac{x-1}{x-3}\geqslant 0$　　D. $x^2-4x+3\geqslant 0$

[听课笔记]

题型 2　含参数的不等式

例 2 (1)[2023·江苏镇江二中模拟] 当 $a>0$,$b>0$ 时,不等式$-b<\frac{1}{x}<a$ 的解集是　　(　　)

A. $\left\{x\middle|x<-\frac{1}{b},\text{或 }x>\frac{1}{a}\right\}$

B. $\left\{x\middle|-\frac{1}{a}<x<\frac{1}{b}\right\}$

C. $\left\{x\middle|x<-\frac{1}{a},\text{或 }x>\frac{1}{b}\right\}$

D. $\left\{x\middle|-\frac{1}{b}<x<0,\text{或 }0<x<\frac{1}{a}\right\}$

(2)(多选题)[2024·江西赣州模拟] 关于 x 的不等式 $ax^2-(a+2)x+2\geqslant 0(a>0)$的解集可能为　　(　　)

A. $\mathbf{R}$

B. $\varnothing$

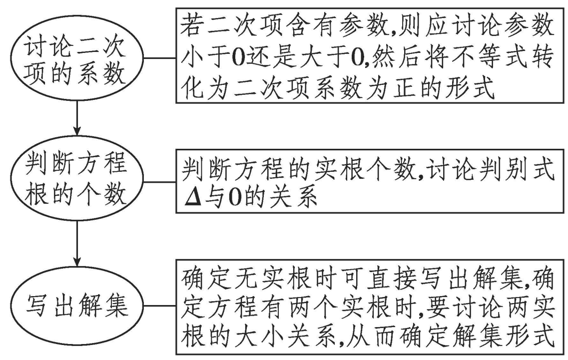
C. $(-\infty,1]\cup\left[\frac{2}{a},+\infty\right)$

D. $\left(-\infty,\frac{2}{a}\right]\cup[1,+\infty)$

[听课笔记]

◆◆ **总结反思**

(1)解含参数的一元二次不等式的一般步骤



(2)在处理分式不等式过程中,如果不能确定分母正负,则可先进行移项,将分式不等式转化为整式不等式,可避免去分母过程中产生的分类讨论.

【对点演练 1】 (1)[2023·湖南邵阳模拟] 不等式 $x^2-5x+6>0$ 的解集为　　(　　)

A. $\{x|2<x<3\}$　　B. $\{x|x<2\}$

C. $\{x|x>3\}$　　D. $\{x|x<2$,或 $x>3\}$

(2)[2023·天津杨村一中期中] 设 $x\in\mathbf{R}$,则“$x(x-4)<0$”是“$|x-1|<1$”的　　(　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

(3)已知 $A=\{x\in\mathbf{R}|x^2-x+a\leqslant 0\}$,$B=\{x\in\mathbf{R}|x^2-x+b\leqslant 0\}$,甲:$a=b$,乙:$A=B$,则　　(　　)

A. 甲是乙的充分不必要条件

B. 甲是乙的必要不充分条件

C. 甲是乙的充要条件

D. 甲是乙的既不充分也不必要条件

(4)[2024·北京朝阳区期末] 已知 $a>0$,则关于 x 的不等式 $x^2-4ax-5a^2<0$ 的解集是________.

[听课笔记]

探究点二　一元二次方程根的分布

例 3 (1)[2024·河北唐县二中期中] 若关于 x 的方程 $ax^2-2x-4=0(a\neq 0)$ 有一个正根和一个负根，则实数 a 的取值范围为 (　　)

A. $(0,+\infty)$　　B. $(2,+\infty)$

C. $(1,+\infty)$　　D. $(-1,+\infty)$

(2)(多选题)[2024·福建莆田十一中期中] 已知一元二次方程 $x^2+(m+1)x+\frac{1}{2}=0(m\in \mathbf{Z})$ 有两个实数根 x_1,x_2，且 $0<x_1<1<x_2<3$，则 m 的值可能为 (　　)

A. -2　　B. -3

C. -4　　D. -5

[听课笔记]

◆◆ **总结反思**

在求解根的分布问题时，要结合根与系数的关系或方程所对应的函数的函数值大小，转化为代数问题进行求解.

【对点演练 2】 (1)[2024·江苏连云港二中模拟] 已知关于 x 的方程 $x^2+(m-2)x+5-m=0$ 有两个不相等的实数根，且两个实数根都大于 2，则实数 m 的取值范围是 (　　)

A. $(-5,-4)\cup(4,+\infty)$

B. $(-5,+\infty)$

C. $(-5,-4)$

D. $(-4,-2)\cup(4,+\infty)$

(2)[2023·陕西西北工业大学附中期中] 若关于 x 的一元二次方程 $kx^2+3kx+k-3=0$ 的两个不等实根都是负数，则实数 k 的取值范围为____________.

[听课笔记]

探究点三　一元二次不等式

题型 1　在 R 上恒成立问题

例 4 (1)命题“$\forall x\in \mathbf{R}, 2kx^2+kx-1<0$”为真命题的一个必要不充分条件是 (　　)

A. $(-8,0)$　　B. $(-8,0]$

C. $[-8,0]$　　D. $(-3,0)$

(2)[2024·广东深圳南头中学期中] 已知一元二次不等式 $x^2+2x+2-a\geqslant 0$ 的解集为 $\mathbf{R}$，则实数 a 的取值范围为 (　　)

A. $(1,+\infty)$　　B. $[1,+\infty)$

C. $(-\infty,1)$　　D. $(-\infty,1]$

[听课笔记]

◆◆ **总结反思**

一元二次不等式在 $\mathbf{R}$ 上恒成立的情况：

$ax^2+bx+c>0(a\neq 0)$ 恒成立 $\Leftrightarrow \begin{cases} a>0, \\ \Delta<0. \end{cases}$

$ax^2+bx+c\leqslant 0(a\neq 0)$ 恒成立 $\Leftrightarrow \begin{cases} a<0, \\ \Delta\leqslant 0. \end{cases}$

题型 2　在给定区间上的恒成立问题

例 5 (1)[2023·江西丰城拖船中学模拟] 已知 $\forall x\in(-1,1), x^2-2x-a>0$，则实数 a 的取值范围是 (　　)

A. $(-\infty,-1]$　　B. $(-\infty,-1)$

C. $(-\infty,3]$　　D. $(-\infty,3)$

(2)[2023·江苏盐城实验中学三模] 命题“$\forall x\in[1,2], x^2-a\leqslant 0$”为真命题的一个充分不必要条件是 (　　)

A. $a\geqslant 4$　　B. $a\leqslant 4$

C. $a>5$　　D. $a\leqslant 5$

[听课笔记]

◆◆ **总结反思**

(1)一元二次不等式在给定区间上的恒成立问题,其本质是将不等式恒成立转化为最大(小)值问题,即若 $f(x)$ 的图象连续不断,则 $f(x)\geqslant 0(x\in[a,b])$ 恒成立等价于 $f(x)_{\min}\geqslant 0(x\in[a,b])$,$f(x)\leqslant 0(x\in[a,b])$ 恒成立等价于 $f(x)_{\max}\leqslant 0(x\in[a,b])$.

(2)用分离参数法可避免分类讨论,直接求出参数的取值范围.

题型 3　给定参数范围的恒成立问题

例 6 [2023·深圳模拟] 对任意的实数 $m\in[0,2]$,不等式 $(x-2)(x-3+m)>0$ 恒成立,则 x 的取值范围是 (　　)

A. $(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$

B. $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$

C. $(-\infty,2)\cup(3,+\infty)$

D. $\mathbf{R}$

[听课笔记]

◆◆ **总结反思**

对于给定参数范围的不等式恒成立问题,解法是主元变换,构造关于参数的新函数,根据新函数的图象和性质,即可列出满足条件的不等式组,从而得不等式所对应的函数的自变量的取值范围.

【对点演练 3】 (1)[2024·江苏连云港二中模拟] 若不等式 $mx^2+mx-4<2x^2+2x-1$ 对任意实数 x 均成立,则实数 m 的取值范围是 (　　)

A. $(-2,2)$

B. $(-10,2]$

C. $(-\infty,-2)\cup[2,+\infty)$

D. $(-\infty,-2)$

(2)[2023·福建厦门一中二模] “$b\in(0,4)$”是“$\forall x\in\mathbf{R},bx^2-bx+1>0$”的 (　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

(3)[2023·云南文山期中] 已知不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $\{x\mid-2<x<3\}$,且对任意 $x\in[1,5]$,不等式 $bx^2+amx+2c>0$ 恒成立,则 m 的取值范围为 (　　)

A. $(-\infty,4\sqrt{3}]$　　B. $(-\infty,4\sqrt{3})$

C. $[13,+\infty)$　　D. $(-\infty,13)$

[听课笔记]

【对点演练 4】(1)(多选题)已知函数 $f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$,对任意 $x\in\mathbf{R}$,都有 $f(2+x)=f(2-x)$,且 $f(-x)=f(x)$,则下列结论正确的是 ( )

A. $f(x)$的图象关于直线 $x=2$ 对称

B. $f(x)$的图象关于点$(2,0)$对称

C. 4 为 $f(x)$的一个周期

D. $y=f(x+4)$为偶函数

(2)[2024·福建南平模拟] 奇函数 $f(x)$的图象关于直线 $x=1$ 对称,当 $x\in(0,1]$时,$f(x)=x^2$,则 $f\left(\frac{45}{4}\right)=$________.

[听课笔记]

专题讲练 1 函数性质的综合应用

探究点一 函数性质的综合应用

例 1 (1)[2024·河北唐山名校联考] 已知函数 $f(x)=e^x+e^{-x}+\lg|x|$,则不等式 $f(x+1)>f(2x-1)$的解集为 ( )

A. $(0,2)$　B. $\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},2\right)$

C. $(0,3)$　D. $\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},3\right)$

(2)[2024·陕西韩城模拟] 已知 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,且满足 $f(x+1)=f(1-x)$,当 $0<x\leqslant1$ 时,$f(x)=\ln x$,则 $f(2023)=$ ( )

A. 0　B. $\ln 3$

C. 1　D. $\ln 2$

(3)[2024·安徽黄山模拟] 已知函数 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数,且 $f(2-x)+f(x)=\frac{2}{3}$,则 $f(2023)=$ ( )

A. $-\frac{2}{3}$　B. $\frac{1}{3}$

C. 0　D. 1

(4)[2023·重庆巴蜀中学模拟] 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$满足 $f(x-1)$的图象关于$(1,0)$中心对称,$f(x+2)$是偶函数,且 $f(x)$在$[0,2]$上单调递增,则 ( )

A. $f(10)<f(19)<f(13)$

B. $f(10)<f(13)<f(19)$

C. $f(13)<f(10)<f(19)$

D. $f(13)<f(19)<f(10)$

[听课笔记]

总结反思

在关于原点对称的区间上,奇函数的单调性相同,偶函数的单调性相反,故讨论奇函数(或偶函数)的单调性时,可只讨论原点右侧函数的单调性,则可推及整个定义域内函数的单调性.

在结合函数的奇偶性与周期性计算函数周期时,要特别注意一些常见式子的等价变换,如:由 $f(x+a)=f(b-x)$,可得 $f(x)=f[(a+b)-x]$.

若 $f(x+a)$为奇函数,则 $f(x)$的图象关于点$(a,0)$对称;若 $f(x+b)$为偶函数,则 $f(x)$的图象关于直线 $x=b$ 对称.

【对点演练 1】(1)[2024·辽宁昌图一中模拟] 已知函数 $f(x)=x^5+x+2$,则不等式 $f(x^2-3)+f(2x)<4$ 的解集是 ( )

A. $(-1,3)$

B. $(-3,1)$

C. $(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$

D. $(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$

(2)[2024·长春十一中质检] 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$满足 $f(x)+f(-x)=0$,$f(-x-1)=f(-x+1)$,当 $x\in(0,1)$时,$f(x)=4^x-3$,则 $f(\log_4 80)=$ ( )

A. $\frac{1}{5}$　B. $-\frac{4}{5}$

C. 1　D. $-\frac{1}{5}$

(3)[2024·甘肃会宁质检] 已知定义在 **R** 上的函数 $f(x)$在$(-\infty,3]$上单调递增,且 $f(x+3)$是偶函数,则不等式 $f(x+1)>f(2x)$的解集为 ( )

A. $\left(1,\frac{5}{3}\right)$

B. $(-\infty,1)\cup\left(\frac{5}{3},+\infty\right)$

C. $(-\infty,1)$

D. $(1,+\infty)$

(4)[2024·南昌二中模拟] 已知函数 $f(x)$的定义域为 **R**,满足 $f(x+1)$为奇函数且 $f(6-x)=f(x)$,当 $x\in[1,3]$时,$f(x)=2^x-2x^2$,则 $f(2023)=$ ( )

A. -10　B. -4　C. 0　D. 10

[听课笔记]

探究点二　抽象函数的性质

例 2 (1)[2022·新高考全国Ⅱ卷] 若函数 $f(x)$的定义域为 **R**,且 $f(x+y)+f(x-y)=f(x)f(y)$,$f(1)=1$,则 $\sum_{k=1}^{22}f(k)=$ ( )

A. -3　B. -2

C. 0　D. 1

(2)(多选题)已知函数 $f(x)$的定义域为 **R**,且 $f\left(\frac{1}{2}\right)\neq0$,若 $f(x+y)+f(x)f(y)=4xy$,则 ( )

A. $f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$

B. $f\left(\frac{1}{2}\right)=-2$

C. 函数 $f\left(x-\frac{1}{2}\right)$是偶函数

D. 函数 $f\left(x+\frac{1}{2}\right)$是减函数

◆◆ **总结反思**

解决抽象函数问题的常用方法:

方法一(通法)

1. 赋值,特殊值代入求值,如令 $x=-1,0,1$.

2. 通过函数式得到抽象函数的性质:

(1)通过 $f(x_1)-f(x_2)$的变换判断单调性;

(2)令式子中出现 $f(x)$和 $f(-x)$,判断函数的奇偶性;

(3)换 x 为 $x+T$ 确定是否具有周期性.

方法二(模型化)

结合具体函数,使得抽象函数具体化,常见的有:

(1)$f(p+q)=f(p)+f(q)$——$y=kx$;

(2)$f(p+q)=f(p)f(q)$——$y=a^x(a>0$ 且 $a\neq1)$;

(3)$f(pq)=f(p)+f(q)$——$y=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq1)$;

(4)$f(pq)=f(p)f(q)$——$y=x^n$(n 为常数);

(5)$f(p+q)=\frac{f(p)+f(q)}{1-f(p)f(q)}$——$y=\tan x$;

(6)$f(p+q)+f(p-q)=2f(p)f(q)$——$y=\cos\omega x$.

注意转化与化归策略、迭代策略、数形结合策略等的运用.

【对点演练 2】 (1)(多选题)定义域为 **R** 的函数 $f(x)$满足 $f(x-y)-f(x+y)=f(x+1)\cdot f(y+1)$,且 $f(0)\neq0$,则下列说法正确的是 ( )

A. $f(1)=0$

B. 函数 $f(x)$为奇函数

C. $f(0)+2f(2)=-2$

D. 4 为函数 $f(x)$的一个周期

(2)[2024·浙江宁波模拟] 已知函数 $f(x)$的定义域为 **R**,$f\left(x+\frac{1}{2}\right)$为奇函数,且对于任意 $x\in$ **R**,都有 $f(2-3x)=f(3x)$,则下列说法正确的是 ( )

A. $f(1-x)=f(x)$

B. $f(3x+1)=f(3x)$

C. $f(x-1)$为偶函数

D. $f(3x)$为奇函数

(3)[2023·广州外国语学校模拟] 已知 $f(x)$是定义在 **R** 上的奇函数,且 $f(x)$在$[0,1]$上单调递减,$f(x+1)$为偶函数.若 $f(x)=m$ 在$[0,6]$上恰好有 4 个不同实数根 x_1,x_2,x_3,x_4,则 $x_1+x_2+x_3+x_4=$________.

[听课笔记]

素养导向

解题指引——函数与导数

例 [2023·新课标Ⅰ卷] 已知函数 $f(x)=a(e^x+a)-x$.

(1)讨论 $f(x)$的单调性;[切入点:导函数的正负判定]

(2)证明:当 $a>0$ 时,$f(x)>2\ln a+\frac{3}{2}$.[关键点:把不等式证明转化为求函数的最值问题]

[思路分析]

(1)求 $f'(x)$,对 a 分类讨论,判断 $f'(x)$的符号,得自变量的范围,从而得 $f(x)$的单调性;

(2)利用(1)中结论,求出 $f(x)$的最小值,把要证的不等式问题转化为证明 $f(x)_{\min}-\left(2\ln a+\frac{3}{2}\right)>0$,通过构造函数,证明新构造函数大于 0,即可得证.

[步骤拆解]

解:(1)由题知 $f(x)$的定义域为 **R**,因为 $f(x)=a(e^x+a)-x$,所以 $\boxed{f'(x)=ae^x-1.}$[1 分]

有关函数的单调性问题,注意定义域优先意识.

当 $a\leqslant 0$ 时,$f'(x)<0$,所以函数 $f(x)$在 **R** 上单调递减.[2 分]

当 $a>0$ 时,令 $f'(x)>0$,得 $x>-\ln a$;令 $f'(x)<0$,得 $x<-\ln a$.[3 分]

所以函数 $f(x)$在$(-\infty,-\ln a)$上单调递减,在$(-\ln a,+\infty)$上单调递增.[4 分]

下结论很关键,否则,就会失去结论分.

综上可得,当 $a\leqslant 0$ 时,函数 $f(x)$在 **R** 上单调递减;
当 $a>0$ 时,函数 $f(x)$在$(-\infty,-\ln a)$上单调递减,在$(-\ln a,+\infty)$上单调递增.

[5 分]

对上一问结论的引用.

(2)证明:由(1)得,当 $a>0$ 时,函数 $f(x)=a(e^x+a)-x$ 的最小值为 $f(-\ln a)=$

$a(e^{-\ln a}+a)+\ln a=1+a^2+\ln a$,

注意新构造自变量 a 的取值范围.

令 $g(a)=1+a^2+\ln a-2\ln a-\frac{3}{2}=a^2-\ln a-\frac{1}{2}$,$a\in(0,+\infty)$,[6 分]

所以 $g'(a)=2a-\frac{1}{a}$.令 $g'(a)>0$,得 $a>\frac{\sqrt{2}}{2}$;令 $g'(a)<0$,得 $0<a<\frac{\sqrt{2}}{2}$.[8 分]

所以函数 $g(a)$在$\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$上单调递减,在$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$上单调递增,[9 分]

求函数值时,要看清所需代入的函数,如本题,需代入函数 $g(a)$,不要误代入其导函数 $g'(a)$.

所以函数 $g(a)$的最小值为 $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\ln\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}=\ln\sqrt{2}>0$,[11 分]

所以当 $a>0$ 时,$f(x)>2\ln a+\frac{3}{2}$成立.[12 分]

[得分秘籍] 破解此类题的关键是:一是会分类讨论,有关含参函数的单调性问题,常利用导数,通过对导函数的符号判断,以及对参数的分类讨论,在定义域范围内即可得其单调性;

二是会转化,将要证明的不等式 $f(x)>g(a)$($f(x)<g(a)$) 转化为 $f(x)_{\min}>g(a)$($f(x)_{\max}<g(a)$)去证明;

三是会构造,即会构造函数,注意新构造函数的自变量的取值范围,并利用导数研究新构造函数的单调性,并求出其最值,即可证得一元不等式成立.